
Lista dodatkowa

1. Czy istnieją dwie zmienne losowe nieskorelowane, których wariancje są równe, ale nie są one niezależne? Jeśli tak, podaj przykład (pokazując, że posiada żądane własności). Jeśli nie, uzasadnij, dlaczego.
2. Ze zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, \alpha)$ wylosowano próbki 1, 2, 3. Jaka jest najlepsza wartość parametru a według metody największej wiarygodności? Sprawdź bardzo dokładnie, jaką wartość ma wówczas funkcja wiarygodności i przemyśl ten wynik.
3. Zmienna losowa X ma gęstość $f_X(x) = x^2$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$ i $f_X(x) = 0$ dla pozostałych x . Ojej, ktoś posadził kwiatka na końcu przedziału! Jaka liczba jest pod kwiatkiem?
4. Zaobserwowano następujące próbki zmiennej losowej X : 2, 1.5, 2. Wiedząc, że dla X zachodzi $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - 2p$, $\mathbb{P}(X = 3) = p$, wyestymuj p metodą największej wiarygodności.
5. Wyznacz gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$, gdy X ma gęstość $f_X(x) = 2x$ dla $x \in [0, 1]$.
6. Wojtuś ma monetę i wierzy, że jest trochę nieuczciwa, postanowił się jednak nią trochę pobawić. Wyrzucił kolejno orła, reszkę i reszkę, i stwierdził na podstawie tych wyników, że w takim razie moneta chyba jednak jest uczciwa. Zakładając, że Wojtuś jest doskonałym statystykiem, podaj, jakiego prawdopodobieństwa wyrzucenia reszki Wojtuś spodziewał się, gdy jeszcze wierzył, że moneta jest nieuczciwa.
7. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają gęstość łączną $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$ dla $x, y > 0$. Wyznacz $\mathbb{P}(X + Y > 1)$.
8. Oblicz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
9. Wyznacz gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$, gdy X ma gęstość równą $f_X(x) = |x|$ dla $x \in [-1, 1]$ i równą 0 dla pozostałych x .
10. Czy istnieją dwie zmienne losowe niezależne, których wariancje są równe, ale te zmienne są skorelowane? Jeśli tak, podaj przykład (pokazując, że posiada żądane własności). Jeśli nie, wykaż, dlaczego.
11. Wykaż, że zdarzenia E i F są niezależne dokładnie wtedy, gdy zdarzenia E i F^c są niezależne.
12. Zaobserwowano następujące próbki zmiennej losowej X : 1, 1, 2. Wiedząc, że dla X zachodzi $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - 2p$, $\mathbb{P}(X = 3) = p$, wyestymuj p metodą największej wiarygodności.
13. Czy istnieje taka wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, że funkcja $f(x) = a + x^2$ określona na przedziale $[0, 2]$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej? Polecam naszkicowanie gęstości.
14. Niech $\langle 0, 1, 1, 0, 1 \rangle$ będzie próbą zmiennej losowej X o rozkładzie Bernoulliego z parametrem θ . Czy istnieje taki rozkład a priori, żeby a posteriori $\theta = \frac{1}{2}$ i $\theta = \frac{1}{4}$ były równie prawdopodobne (i miały dodatnie prawdopodobieństwo)?
15. Zmienne losowe X i Y mają gęstość łączną $f_{X,Y}(x,y) = x + y$ dla $x, y \in [0, 1]$. Wyznacz $\mathbb{P}(XY < \frac{1}{4})$. Polecam rysunek.
16. Skonstruuj macierz rzutu płaszczyzny na prostą o równaniu $\pi x + y = 0$.
17. Test na gripę daje pozytywny wynik u 99% chorych i 5% zdrowych. W populacji 5% osób choruje na gripę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem pozytywnym na teście na gripę faktycznie choruje na gripę?
18. Zmienne losowe X i Y mają łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa postaci

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wyznacz $\mathbb{P}(X > 2Y)$.

19. Czym się różni MLE od MAP?

20. Zmienna losowa X ma rozkład określony poniższą tabelą z parametrem θ . Zaobserwowano próbki $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. Wyznacz MLE dla θ .

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	θ	2θ	$1 - 3\theta$

21. Okazało się, że dla zdefiniowanej powyżej zmiennej losowej X parametr θ ma rozkład a priori: $\theta = 0.1$ z prawdopodobieństwem 0.5 oraz $\theta = 0.2$ z prawdopodobieństwem 0.5. Wyznacz rozkład a posteriori dla θ .