
Lista 5

1. Niech X, Y, Z będą zmiennymi losowymi takimi, że $X \perp Y|Z$.
 - (a) Czy z warunkowej niezależności $X \perp Y|Z$ wynika bezwzględna niezależność $X \perp Y$? Podać przykład lub kontrprzykład.
 - (b) Czy z bezwzględnej niezależności $X \perp Y$ wynika warunkowa niezależność $X \perp Y|Z$? Podać przykład lub kontrprzykład.
2. Rozważmy następujący model (rozkład normalny można uprościć do dwupunktowego na lewo i prawo od średniej):
 - $Z \sim \text{Bernoulli}(0.5)$
 - $X|Z = 0 \sim \mathcal{N}(0, 1), X|Z = 1 \sim \mathcal{N}(3, 1)$
 - $Y|Z = 0 \sim \mathcal{N}(0, 1), Y|Z = 1 \sim \mathcal{N}(-2, 1)$
 - $X \perp Y|Z$
 - (a) Sprawdzić, czy $X \perp Y$ (bezwzględna niezależność).
 - (b) Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$.
 - (c) Wyznaczyć $\mathbb{P}(Z = 1|X = 2, Y = -1)$.
3. Niech X_1, X_2, X_3 tworzą łańcuch Markowa z przestrzenią stanów $\{1, 2\}$ i macierzą przejścia $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$.
 - (a) Pokazać, że $X_1 \perp X_3|X_2$.
 - (b) Obliczyć $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = 2|X_2 = 1)$.
 - (c) Czy X_1 i X_3 są bezwzględnie niezależne? Uzasadnić odpowiedź.
4. Model pogody: stan ukryty to pogoda (słonecznie/deszczowo), obserwacja to nastrój osoby (dobry/zły).
 - $\mathbb{P}(\text{słońce}) = 0.7, \mathbb{P}(\text{deszcz}) = 0.3$
 - $\mathbb{P}(\text{słońce jutro}|\text{słońce dziś}) = 0.8$
 - $\mathbb{P}(\text{deszcz jutro}|\text{deszcz dziś}) = 0.6$
 - $\mathbb{P}(\text{dobry nastrój}|\text{słońce}) = 0.9$
 - $\mathbb{P}(\text{dobry nastrój}|\text{deszcz}) = 0.2$

Jeśli przez trzy dni obserwujemy nastroje: (dobry, zły, dobry), jaka jest najbardziej prawdopodobna sekwencja pogody?
5. Rozważmy model z trzema monetami o różnych prawdopodobieństwach wyrzucenia orła: $\mathbb{P}_1 = 0.1, p_2 = 0.5, p_3 = 0.9$. W każdym kroku losowo wybieramy monetę zgodnie z rozkładem $(0.3, 0.4, 0.3)$, a następnie rzucamy nią.
 - (a) Czy to jest HMM? Jeśli tak, określić wszystkie składniki modelu.
 - (b) Obserwujemy sekwencję: orzeł, reszka, orzeł. Która moneta była prawdopodobnie używana w każdym rzucie?
 - (c) Obliczyć $\mathbb{P}(\text{orzeł w pierwszym rzucie})$ i $\mathbb{P}(\text{orzeł w drugim rzucie}|\text{orzeł w pierwszym rzucie})$.
6. Firma analizuje zachowania klientów. Zmienna S oznacza segment klienta (premium/standard), X - miesięczne wydatki, Y - liczbę wizyt w sklepie. Zakładając, że $X \perp Y|S$:
 - (a) Napisać rozkład łączny $f(x, y, s)$ w funkcji rozkładów brzegowych i warunkowych.

- (b) Jak wpływa założenie warunkowej niezależności na przewidywanie Y na podstawie X ?
- (c) Jeśli $X|S = \text{premium} \sim \mathcal{N}(1000, 100^2)$, $X|S = \text{standard} \sim \mathcal{N}(300, 50^2)$, $\mathbb{P}(S = \text{premium}) = 0.3$, obliczyć $\mathbb{E}[X]$ i $\text{Var}(X)$.
- 7.** Niech $(X_t)_{t \geq 1}$ będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $\{1, 2, 3\}$. Dla każdego t , obserwujemy Y_t takie, że $Y_t|X_t \sim \text{Poisson}(X_t)$.
- (a) Zapisać explicite założenia warunkowej niezależności w tym modelu.
- (b) Obliczyć $\mathbb{P}(Y_1 = 2, Y_2 = 1|X_1 = 2, X_2 = 1)$.
- (c) Znaleźć $\mathbb{E}[Y_t|X_1, \dots, X_t, Y_1, \dots, Y_{t-1}]$.
- 8.** Niech X będzie wynikiem rzutu kostką sześcienną (z możliwymi wynikami 1, 2, 3, 4, 5, 6), zaś Y wynikiem rzutu monetą (z możliwymi wynikami 0, 1). Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|XY)$.
- 9.** Niech X będzie wynikiem rzutu kostką sześcienną (z możliwymi wynikami 0, 1, 2, 3, 4, 5), zaś Y wynikiem rzutu monetą (z możliwymi wynikami 0, 1). Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|XY)$.
- 10.** Niech X ma rozkład Poissona z parametrem 1. Zmienna Y ma rozkład Bernoulliego z parametrem $\mathbb{P}$, przy czym przyjmuje wartość 0 lub X .
- (a) Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y)$.
- (b) Znaleźć $\mathbb{E}(Y|X)$.
- 11.** Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, zaś Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y)$.
- 12.** Zmienne X, Y mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 10]$.
- (a) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X + Y|Y)$.
- (b) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|X + Y)$.
- (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|\min(X, Y))$.
- 13.** Niech X, Y będą niezależne o rozkładzie Bernoulliego z parametrem $\mathbb{P}$, a $Z = \mathbb{1}_{X+Y=0}$.
- (a) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Z), \mathbb{E}(Y|Z)$. Czy są niezależne?
- (b) Wyznaczyć $\mathbb{E}(Z|X)$.
- (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}(Z|X + Y)$.
- (d) Wyznaczyć $\mathbb{E}(Z|XY)$.