

Lista 4

Zakładamy, że łańcuchy Markowa są jednorodne, tj. mają macierz przejścia. W zadaniach starajcie się znajdować macierze przejścia.

1. Skonstruuj macierz przejścia spaceru losowego na zbiorze $\{0, \dots, 10\}$:
 - (a) z barierami elastycznymi (tj. odbijamy się od brzegu),
 - (b) z barierami pochłaniającymi.
2. Czy istnieje łańcuch Markowa, który ma kilka różnych macierzy przejścia?
3. Pokazać przykład łańcucha Markowa $X_0, X_1, \dots$ i dowolnej funkcji (borelowskiej; jeśli nie wiesz, co to, to i tak będzie borelowska) f , takich że $f(X_0), f(X_1), \dots$ nie jest łańcuchem Markowa.
4. Niech $\langle U_n \rangle$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, $\mathbb{P}(U_n = 1) = P(U_n = -1) = \frac{1}{2}$. Czy łańcuchem Markowa jest:
 - (a) $A_n = U_n U_{n+1}$?
 - (b) $B_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{2}$?
 - (c) $X_n = U_1 + \dots + U_n$?
 - (d) $Y_n = |X_n|$?
 - (e) $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n) - X_n$?
5. W powyższym zadaniu zmieniamy $\langle U_n \rangle$ na $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(U_n = -1) = q$, $p + q = 1$.
6. Niech X i Z będą łańcuchami Markowa o wartościach całkowitoliczbowych. Czy $X + Z$ musi być łańcuchem Markowa?
7. W dwóch pudełkach umieszczono k kul białych i k kul czarnych, po k kul w każdym. Przejście pomiędzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy je i odkładamy do pudełek. Znaleźć macierz przejścia takiego łańcucha Markowa. Zauważmy, że cały układ możemy opisać jedną liczbą – liczbą białych kul w pierwszym pudełku.
8. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów monetą, które trzeba wykonać, aby otrzymać sekwencję RORO? A RRRO?
9. Na wyspach Bergamutach każdy człowiek pełni jeden z trzech zawodów: szklarz, zdun lub kowal. Małżonka można poznać jedynie w pracy, a zawód rodziców istotnie wpływa na wybór zawodu przez dziecko. Poniższa tabela określa prawdopodobieństwo, że dziecko wybierze zawód i , jeśli oboje rodzice pełnią zawód j .

	szklarz	zdun	kowal
szklarz	0.5	0.2	0.3
zdun	0.1	0.7	0.2
kowal	0.15	0.05	0.8

Czy istnieje taki rozkład populacji, który w następnym pokoleniu nie zmieni się?

10. Niech X ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, a Y na zbiorze $\{X, \dots, 3\}$. Obliczyć:
 - (a) entropię $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$,
 - (b) wzajemną informację $I(X; Y)$,
 - (c) warunkową entropię $H(X|Y)$, $H(Y|X)$,
 - (d) wzajemną informację warunkową $I(X; Y|X)$, $I(X; Y|Y)$.
 - (e) dywergencję Kullbacka-Leiblera $D_{KL}(X||Y)$, $D_{KL}(Y||X)$.
11. Niech X, Y będą dwiema zmiennymi losowymi o rozkładzie charakteryzowanym przez $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{3}$. Obliczyć:

- (a) $H(X), H(Y), H(X, Y),$
- (b) $I(X; Y),$
- (c) $H(X|Y), H(Y|X),$
- (d) $I(X; Y|X), I(X; Y|Y),$
- (e) $D_{KL}(X||Y), D_{KL}(Y||X).$

12. Niech X, Y będą dwiema zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami λ, μ odpowiednio. Obliczyć:

- (a) $H(X), H(Y), H(X, Y),$
- (b) $I(X; Y),$
- (c) $H(X|Y), H(Y|X),$
- (d) $I(X; Y|X), I(X; Y|Y),$
- (e) $D_{KL}(X||Y), D_{KL}(Y||X).$