

---

## Lista 3

---

1. Dla  $a, b \in \mathbb{Z}$  niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie beta z parametrami  $a$  i  $b$ .
  - (a) Wyznacz  $\mathbb{E}[X]$ .
  - (b) Wyznacz  $\text{Var}(X)$ .
  - (c) Wyobraź sobie, że w definicji rozkładu beta nie ma czynnika normującego. Wyznacz całkę z takiej pseudogęstości. Nie powinno być zaskoczeniem, że otrzymasz odwrotność czynnika normującego, ale w bardziej przystępnej postaci.
2. Niech  $X$  będzie zmienną losową o następującym rozkładzie:

|                     |                |               |                  |                 |
|---------------------|----------------|---------------|------------------|-----------------|
| $x$                 | 0              | 1             | 2                | 3               |
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $\frac{2p}{3}$ | $\frac{p}{3}$ | $\frac{2-2p}{3}$ | $\frac{1-p}{3}$ |

Wylosowano następujące próbki: 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3. Znajdź MLE dla  $p$ .
3. Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą niezależnymi obserwacjami z rozkładu jednostajnego na przedziale  $[0, \theta]$ . Znajdź MLE dla  $\theta$ .
4. Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą niezależnymi obserwacjami z rozkładu wykładniczego z parametrem  $\lambda$ . Znajdź MLE dla  $\lambda$ .
5. Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą niezależnymi obserwacjami z rozkładu  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Znajdź MLE dla  $\mu$  i  $\sigma^2$ .
6. Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą niezależnymi obserwacjami z rozkładu Poissona z parametrem  $\lambda$ . Znajdź MLE dla  $\lambda$ .
7. Znajdź rozkład a posteriori parametrów  $\theta$  w modelu Bernoulliego z jednym rzutem, jeśli a priori  $\theta \sim \text{Beta}(2, 3)$ , a rzut zakończył się:
  - (a) sukcesem,
  - (b) porażką.
8. Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem  $\lambda$ . Załóżmy, że  $\lambda$  ma rozkład dwupunktowy o prawdopodobieństwach a priori wynoszących  $\frac{1}{3}$  dla  $\lambda = 1$  i  $\frac{2}{3}$  dla  $\lambda = 2$ . Wyznacz rozkład a posteriori  $\lambda$  po obserwacji  $X = 2, 3, 4, 5, 6$ .
9. Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, \theta]$ , gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Załóżmy, że a priori  $\theta$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda = 1$ . Wyznacz rozkład a posteriori  $\theta$  po obserwacji  $X = 2$ .
10. W teleturnieju dostajesz dwie koperty. Jedna z nich zawiera pewną kwotę, a druga dwukrotność tej kwoty. Możesz wybrać jedną kopertę i zatrzymać zawartość, lub zamienić koperty i zatrzymać zawartość nowej koperty. Co opłaca się zrobić? Czy ma to sens? Spoiler: niezbyt. Jak to naprawić? Napraw i przy wybranych przez siebie założeniach powiedz, co opłaca się zrobić.
11. Niech  $\langle 0, 1, 1, 0, 1 \rangle$  będzie próbą zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie Bernoulliego z parametrem  $\theta$ . Znajdź taki rozkład a priori, żeby a posteriori  $\theta = \frac{1}{2}$  i  $\theta = \frac{7}{10}$  były równie prawdopodobne. Oczywiście istnieje rozwiązanie trywialne, ale bądźmy kreatywni.