
Lista 2

- ☐ 1. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.
- ☐ 2. Oblicz pochodną funkcji $g(x) = e^x \cos(x)$.
- ☐ 3. Oblicz pochodną funkcji $h(x) = \frac{1}{x^2}$.
- ☐ 4. Oblicz pochodną funkcji $i(x) = \sin(x^2)$.
- ☐ 5. Oblicz pochodną funkcji $j(x, y) = x^3 + y^2 + xy$ względem obu zmiennych (czyli najpierw uznając x za zmienną, a y za stałą/parametr, a potem odwrotnie). Wyznacz gradient tejże funkcji.
- ☐ 6. Oblicz gradient funkcji $k(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- ☐ 7. Oblicz gradient funkcji $l(x, y, z) = \text{ReLU}(e^{xyz})$.
- ☐ 8. Oblicz gradient funkcji $m(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.
- ☐ 9. Zdefiniujmy parę funkcji $n_i(x, y) = x^i + y^i$ dla $i = 1, 2$. Oblicz gradienty obu funkcji.
- 10. Niech $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Oblicz gradienty tej funkcji (dla „górnej” i „dolnej” funkcji).
- 11. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Zapisz wartość funkcji $f(X) = AX$ dla wektora $X = \langle x, y \rangle^T$ w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 12. Niech A będzie macierzą $n \times n$ oraz $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle^T$. Zapisz wartość funkcji $f(X) = AX$ w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 13. Niech A będzie macierzą $n \times m$ oraz $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle^T$. Zapisz wartość funkcji $f(X) = AX$ w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 14. Niech A będzie macierzą $n \times m$ oraz $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle^T$. Zapisz wartość funkcji $f(X) = X^T A$ w postaci wektora i oblicz gradienty.
- 15. Niech A będzie macierzą $n \times m$ oraz $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle^T$. Zapisz wartość funkcji $f(X) = X^T A X$ w postaci wektora i oblicz gradienty.
- ☐ 16. Znajdź macierz, która wektor $\langle 1, 0 \rangle^T$ przerzuca na $\langle 1, -1 \rangle^T$, a wektor $\langle 0, 1 \rangle^T$ na $\langle 1, 1 \rangle^T$.
- ☐ 17. Znajdź macierz, która wektor $\langle 1, -1 \rangle^T$ przerzuca na $\langle 1, 0 \rangle^T$, a wektor $\langle 1, 1 \rangle^T$ na $\langle 0, 1 \rangle^T$.
- ☐ 18. Znajdź macierz rzutu płaszczyzny na oś poziomą.
- 19. Znajdź macierz rzutu płaszczyzny na prostą o równaniu $x + y = 0$. Koniecznie skorzystaj z poprzednich trzech zadań.
- 20. Prosta o równaniu $3x + 2y = 0$ daje się zapisać jako $\{tX : t \in \mathbb{R}\}$ dla pewnego wektora X . Znajdź wektor X .
- 21. Znajdź wszystkie wektory prostopadłe do wektora $\langle 2, 7 \rangle^T$.
- 22. Znajdź macierz rzutu płaszczyzny na prostą o równaniu $ax + by = 0$.
- 23. Znajdź macierz, która przerzuca wektor $\langle 1, 2 \rangle^T$ na $\langle 3, 4 \rangle^T$, a wektor $\langle 5, 6 \rangle^T$ na $\langle 7, 8 \rangle^T$.
- ☐ 24. Zdiagonalizuj kilka losowych macierzy.
- 25. Czy istnieje taka macierz A wymiaru 2×2 o wyrazach wymiernych, że $A \neq I$, ale $A^2 = I$?
- 26. Czy istnieje taka macierz A wymiaru 3×3 o wyrazach wymiernych, że $A \neq I$, ale $A^3 = I$?
- 27. Znajdź nieidentycznościową macierz A wymiaru 5×5 o wyrazach całkowitych, dla której $A^n = I$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy n jest wielokrotnością 6.

- 28.** Dane są takie macierze kwadratowe A, B rozmiaru 7×7 o wyrazach rzeczywistych, że macierz A jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej 7 różnych wyrazów, a ponadto $AB = BA$. Dowieść, że macierz B również jest macierzą diagonalną.
- 29.** Niech $\mathbf{y}$ będzie wektorem zmiennych prognozowanych, a $\mathbf{X}$ macierzą zmiennych objaśniających. Chcemy znaleźć wektor współczynników θ , który minimalizuje funkcję kosztu $J(\theta) = \sum (\mathbf{y}_i - \theta^T \mathbf{x}_i)^2$.
- (a) Jaka jest interpretacja funkcji kosztu $J(\theta)$?
 - (b) Znajdź macierzowy zapis funkcji $J(\theta)$.
 - (c) Znajdź gradient funkcji $J(\theta)$.
 - (d) Znajdź wektor θ , dla którego funkcja $J(\theta)$ jest minimalna.
 - (e) Czy znaleziony wektor θ jest jedyny?