
Lista 1

1. (a) Rzucamy kolejno dwiema sześciennymi kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza liczba będzie większa od drugiej?
(b) Kostki stały się tysiącienne. Co wtedy?
(c) Losujemy kolejno dwie liczby z przedziału $[0, 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza będzie większa od drugiej?
2. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwie osoby z naszej grupy ćwiczeniowej mają urodziny w tym samym dniu. Stwierdź, że wynik jest podejrzenie duży i znajdź takie osoby.
3. Losujesz pięć kart ze standardowej talii (bez dzokerów). Wyznacz prawdopodobieństwo otrzymania poszczególnych układów pokerowych. Zadanie nudne, ale wynik jest ciekawy.
4. (a) Gramy w grę polegającą na rzucaniu monetą. Każdy rzut kosztuje cię złotówkę. Wyrzucisz reszkę – kasa wypłaca ci dwa złote. Wyrzucisz orła – nie dostajesz nic. Założmy, że mamy w portfelu 50 zł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda ci się osiągnąć stan konta równy 200 zł zanim zbankrutujesz? Paradoksalnie zadanie staje się prostsze, gdy zaczniemy od n zł w portfelu. Gdy $n = 0$ lub $n = 200$, jest łatwo. A dla pozostałych n -ów?
(b) Obok ciebie zjawiała się magiczna wielbłądzica, która chętnie ochroni cię przed bankructwem, pożyczając ci dowolne sumy. Tym niemniej dług trzeba będzie spłacić, zanim ogłosisz zwycięstwo. Jak zmieni się prawdopodobieństwo wygranej?
(c) O nie! Moneta okazała się oszukana! Reszkę wyrzucasz z prawdopodobieństwem $p \in [0, 1]$, a orła z prawdopodobieństwem $1 - p$. Co wtedy? Czy magiczna wielbłądzica będzie w stanie ci pomóc?
5. Na nieskończoną szachownicę upuszczamy z dużej wysokości igłę, której długość jest dokładnie równa długości boku kwadracika szachownicy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła dotknie którejś z poziomych prostych rozgraniczających kwadraciki? To się nazywa igła Buffona, ale nie ściągamy z internetu, bo to niemiłe i bez sensu.
6. Wykaż, że zdarzenia E i F są niezależne dokładnie wtedy, gdy zdarzenia E i F^c są niezależne.
7. Założmy, że $\mathbb{E}[X] = 4$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości $\mathbb{E}[X^2]$?
8. Niech $\mathbb{P}(x = 0, y = 1) = \mathbb{P}(x = 0, y = -1) = \mathbb{P}(x = 1, y = 0) = \mathbb{P}(x = -1, y = 0) = \frac{1}{4}$. Czy zmienne te są skorelowane? Czy są niezależne?
9. Wykaż, że istotnie $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
10. Losujemy X, Y jednostajnie z przedziału $[0, 1]$. Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej $\min(X, Y)$.
11. Fabryka produkuje trzy rodzaje wihajstrów. Spośród pierwszego rodzaju 1% jest wadliwych, spośród drugiego 2%, a spośród trzeciego 3%. Wihajstrów pierwszego rodzaju produkowanych jest 45%, drugiego 30%, a trzeciego 25%. Losowo wybrany wihajster okazał się wadliwy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to wihajster pierwszego rodzaju?
12. Student zna odpowiedź na pytanie z prawdopodobieństwem p . Jeśli nie zna, to losuje odpowiedź spośród o możliwych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zna odpowiedź, jeśli odpowiedział poprawnie?
13. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $f(x) = 2x$ na przedziale $[0, 1]$. Czy istnieje taka wartość parametru a , że zmienna losowa $Y = X^a$ ma rozkład jednostajny?
14. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o rozkładzie dwuwymiarowym dany poniższą tablicą:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0.1	0.2	0.1
$X = 1$	0.2	0.0	0.1
$X = 2$	0.1	0.1	0.1

Znajdź rozkłady brzegowe. Czy zmienne X i Y są niezależne? Jest takie pojęcie jak i.i.d. (independent and identically distributed). Czy zmienne X i Y są i.i.d.?

15. Niech X, Y mają łączną gęstość $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6e^{2x+3y} & \text{dla } \langle x, y \rangle \in (-\infty, 0]^2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } \langle x, y \rangle \end{cases}$.
- (a) Czy zmienne X i Y są niezależne?
 - (b) Znajdź $\mathbb{P}(X > Y)$.
16. Niech X, Y mają łączną gęstość równą $6xy$ dla $x \in [0, 1], y \in [0, \sqrt{x}]$, a dla pozostałych argumentów równą 0.
- (a) Znajdź rozkłady brzegowe.
 - (b) Czy zmienne te są niezależne?
 - (c) Znajdź rozkład warunkowy $f_{X|Y}(x|y)$.
 - (d) Znajdź rozkład warunkowy $f_{Y|X}(y|x)$.
17. Mówimy, że rozkład ma własność braku pamięci, jeśli dla dowolnych $s, t > 0$ zachodzi $\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.
- (a) Czy rozkład wykładniczy ma własność braku pamięci?
 - (b) Załóżmy, że autobusy kursują według rozkładu Poissona z intensywnością λ (tj. liczba autobusów w ciągu jednostki czasu ma rozkład Poissona z parametrem λ). Pokaż, że międzyczasy pomiędzy kolejnymi przyjazdami autobusów są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym.
 - (c) Załóżmy, że autobusy przyjeżdżają z rozkładem Poissona z intensywnością $\lambda = 0.1$, czyli średnio raz na 10 minut. Jeśli losowo przyjdiesz na przystanek, ile średnio musisz czekać na autobus?
18. Dodatkowo zmienne losowe X, Y mają jednakowy rozkład. Czy $\mathbb{E} \frac{X}{X+Y}$ musi być równa $\mathbb{E} \frac{Y}{X+Y}$?
19. Niech X będzie zmienną losową o wartościach naturalnych. Wykaż, że $\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.
20. Na uniwersytecie zdawalność analizy matematycznej wśród informatyków jest mniejsza niż wśród matematyków. Na politechnice też. Czy jest możliwym, żeby wśród wrocławskich studentów informatyki była wyższa zdawalność analizy niż wśród wrocławskich studentów matematyki?
21. Dla wielowymiarowego wektora losowego $X = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ nie mówimy o wariancji, tylko o macierzy kowariancji. Jest to macierz Σ , której elementy s_{ij} są równe każdorazowo $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
- (a) Wykaż, że macierz kowariancji jest symetryczna.
 - (b) Wykaż, że macierz kowariancji jest nieujemnie określona, czyli dla każdego wektora liczb rzeczywistych $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ liczba $a^T \Sigma a$ jest nieujemna. Zbadaj wartość oczekiwaną iloczynu skalarnego X z a .
 - (c) Wywnioskuj z poprzednich dwóch podpunktów (i twierdzenia spektralnego), że dla każdej macierzy kowariancji Σ istnieje taka macierz A , że $A^4 = \Sigma$. Trzeba się nie przestraszyć sformułowania twierdzenia spektralnego, a najlepiej o nim czytać na angielskiej Wikipedii.
22. O ruchu Browna musisz wiedzieć, że jest to ciąg zmiennych losowych $B_x, x \geq 0$ o własności niezależnych przyrostów normalnych, tj. $B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, s - t)$ i wszystkie takie różnice są niezależne, o ile o siebie nie zahaczają (przy czym $B_0 = 0$). Wyznacz:
- (a) $\mathbb{E}(B_t)$,
 - (b) $\text{Cov}(B_s, B_t)$,
 - (c) $\text{Var}(B_t)$
 - (d) $\mathbb{P}(B_1 > 0 \wedge B_2 > 0)$.